Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Febbraio 1957 - Serie IV, vol. XXXV, n. 1 (pagg. 1-13)

CARLO FELICE MANARA

Idee classiche ed idee moderne sulla Geometria Algebrica

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da F. ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

Il primo numero (Febbraio 1957) della trentacinquesima annata consta di 68 pagine e contiene, oltre le Questioni, i seguenti articoli:

C. F. MANARA - *Idee classiche ed idee moderne sulla Geometria Algebrica.*

I. BERTOLDI - « *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* » *di J. Newton.*

U. GASAPINA - *Le equazioni di quarto grado.*

Abbonamento 1956: Italia L. 900 — - Estero L. 1800 —.

Il *Periodico* si pubblica in 5 fascicoli annuali.

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli

---

Le annate complete 1924, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52, 53, 54, 55 e 56 dell'attuale serie del

PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita al prezzo di L. 1600 l'annata, per l'Italia, L. 2400 per l'estero.

Esistono fascicoli separati dei 20 volumi al prezzo di:
L. 600 al fascicolo per l'Italia — L. 1200 per l'estero.

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Febbraio 1957 - Serie IV, vol. XXXV, n. 1 (pagg. 1-13)

CARLO FELICE MANARA

Idee classiche ed idee moderne sulla Geometria Algebrica

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Idee classiche ed idee moderne sulla Geometria Algebrica (*)

1. Non è possibile qui dar conto in modo esauriente di tutto lo sviluppo storico della Geometria Algebrica: invero la sua origine si potrebbe far risalire ai tempi immediatamente successivi alla invenzione della Geometria Analitica; per es. si potrebbe considerare come un'opera di Geometria Algebrica quella «Enumeratio linearum tertii ordinis» di NEWTON nella quale si dava una trattazione metodica di curve essenzialmente nuove, rispetto a quelle conosciute dall'antichità, e si introducevano dei concetti e dei metodi che si possono riconoscere appartenenti alla Geometria Proiettiva, configurata come corpo dottrinale autonomo in epoca molto posteriore.

Tuttavia preferirei far rientrare tutte le trattazioni di argomenti geometrici con metodi algebrici che precedono il Sec. XIX più nella preistoria che nella storia della Geometria Algebrica, perchè non vorrei fare risalire la origine di questa dottrina ad un'epoca precedente a quella in cui la Matematica entrò in possesso di una teoria coerente dei numeri complessi.

Venendo quindi ad un'epoca più vicina a noi, vorrei considerare come periodo iniziale della Geometria Algebrica l'epoca in cui si svolge l'opera del PONCELET; infatti si potrebbe vedere nella enunciazione del famoso «Principio di continuità» di questo Geometra una esplicita e feconda introduzione del campo complesso nella Geometria.

Nello spirito e nell'ordine di idee del «Principio di continuità» le risorse dell'Algebra venivano sfruttate al massimo,

(*) Il presente articolo riproduce parte della prolusione dell'A. ai suoi corsi nella Università di Pavia.

e l'Algebra entrava nel campo della Geometria dando alle formulazioni di questa la massima portata, nel corpo numerico più vasto nel quale i simboli e le operazioni algebriche abbiano senso: il corpo dei numeri complessi.

Di conseguenza la Geometria veniva stimolata ad adeguare i propri metodi ed il proprio linguaggio alla nuova estensione offerta dall'Algebra, la quale a sua volta permetteva di enunciare in modo unitario delle proprietà che erano state enunciate in modo frammentario, di introdurre un metodo di dimostrazione e di ricerca là dove era stato il campo del tentativo inorganico, anche se spesso geniale.

Si ha qui un esempio della fecondità di risultati portata nel campo della Matematica dalla invenzione della Geometria analitica, con l'instaurare un continuo processo dialettico tra la Geometria che pone un problema, l'Algebra che ne dà la soluzione e insieme pone le premesse e dà gli strumenti per nuove generalizzazioni, la Geometria che interpreta le soluzioni e, a sua volta, pone nuovi problemi sulla base delle suggestioni fornite dall'Algebra.

2. Appare sintomatico il fatto che l'opera del PONCELET suscitasse delle critiche da parte dei Matematici del suo tempo; AGOSTINO CAUCHY così si esprime a proposito del « Principio di continuità »:

«... Questo principio, a parlare propriamente, non è che una « sorta di forte induzione che aiuta ad estendere la validità « dei Teoremi (i quali sono stati stabiliti in base a certe « restrizioni) a dei casi in cui tali restrizioni non sussistono. « Applicato alle curve di II° grado esso ha condotto a dei « risultati esatti. Ma noi non pensiamo che esso possa essere « ammesso in generale ed applicato indistintamente a tutte le « questioni di Geometria e di Analisi: accordandogli troppa « confidenza si potrebbe essere indotti in errori manifesti ».

È questo un esempio caratteristico di critica che viene fatta a dei procedimenti che sono sostanzialmente di Geometria Algebrica; critica che risulta valida se rivolta contro l'enunciato del « Principio » ma non contro l'uso fattone dal suo inventore. Infatti l'enunciato non stabiliva esplicitamente tutte le ipotesi nelle quali il « Principio » stesso era valido e soprattutto l'ipotesi fondamentale che il « Principio » andasse applicato nei casi in cui entrano delle funzioni algebriche (le cui proprietà ed il cui comportamento erano allora d'altronde ben lontani dall' essere completamente noti) mentre l' inventore teneva ogni volta conto di tali restrizioni nella sua applicazione.

Pertanto come osserva acutamente il BOMPIANI [1] avevano ragione tutti e due. Ragione il PONCELET perchè di fatto usava il suo « Principio » in questioni esclusivamente algebriche e sfruttando implicitamente in ogni caso le proprietà che caratterizzano le funzioni algebriche tra le funzioni analitiche; ragione aveva il CAUCHY nel pretendere sostanzialmente che la estensione del « Principio » fosse esplicitamente limitata e che le ipotesi venissero chiaramente e completamente enunciate e quindi ponendo — con le sue critiche — le basi per una ulteriore analisi delle proprietà delle funzioni algebriche e per la precisazione degli strumenti usati dalla Geometria.

Ho voluto ricordare questa controversia perchè da essa appare la necessità di quello che col PASCAL si potrebbe chiamare « esprit de finesse » e del quale hanno dato prova in ogni tempo i grandi cultori di Geometria Algebrica, usando certi strumenti di ricerca che manovrati da altri conducevano a risultati erronei; strumenti che pertanto cadevano sotto le critiche non ingiuste di altri Matematici. Le precisazioni venute in seguito (spesso a distanza di tempo) hanno quasi sempre dimostrato che i grandi si muovevano — istintivamente direi — entro i limiti che la loro intuizione e la loro esperienza dettava, anche se tali limiti non venivano sempre esplicitamente enunciati.

3. Ma non è mia intenzione il passare qui in rassegna le discussioni e le controversie che hanno punteggiato il cammino della Geometria Algebrica e le critiche elevate contro di lei; controversie e critiche che hanno ogni volta provocato feconde sistemazioni e precisazioni, le quali hanno confermato quasi sempre la validità delle intuizioni dei grandi cultori. Ritorno piuttosto al breve esame delle correnti di pensiero matematico

---

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Il principio di continuità e l'immaginario in Geometria* (in « Questioni riguardanti le Matematiche elementari » di F. ENRIQUES - Art. X (Parte I, Vol. 2°)).

che potrebbero essere considerate come le fonti storiche della Geometria Algebrica; ed in questo ordine di idee non posso tralasciare di nominare la Teoria delle funzioni Ellittiche e degli integrali abeliani. È noto come le proprietà delle funzioni ellittiche vengano illustrate in modo luminoso e rischiarate di luce originale e nuovissima se vengono collegate con la teoria delle curve algebriche di genere uno. In questo caso la Geometria Algebrica dimostra tutta la potenza dei suoi metodi e si dimostra pienamente la opportunità della introduzione di quella varietà a due dimensioni (la «Riemanniana») che a prima vista sembra mal rispondere ad un oggetto che siamo abituati a chiamare «curva» e che invece è atta a rendere ragione ed ad illustrare il comportamento dell'ente a cui si riferisce: la «curva algebrica», insieme delle coppie di valori complessi x ed y che soddisfano ad una equazione algebrica

$$f(x, y) = 0.$$

Alla doppia periodicità delle funzioni ellittiche corrisponde l'ordine di connessione della riemanniana delle curve di genere uno, topologicamente equivalente ad un toro; al Teorema di Abel corrispondono i legami intercorrenti tra i gruppi di punti che appartengono ad una serie lineare, alle proprietà dei periodi la configurazione dei flessi ecc.

Più in generale, si può asserire che la Teoria degli integrali abeliani (integrali di funzioni razionali dei punti di una curva algebrica) dava una struttura unitaria a problemi che si presentavano prima in modo frammentario e poneva le basi di una costruzione intellettuale che sta tra le più imponenti della Matematica moderna.

4. L'avvento della grande Scuola Italiana nel mondo scientifico, per merito di Cremona, Corrado Segre, Bertini, Castelnuovo, Enriques, Severi faceva assumere alla teoria delle funzioni algebriche un aspetto inconfondibile che permane ancora oggi come uno dei suoi aspetti classici: quello di «Teoria Geometrica delle funzioni algebriche».

Non è possibile qui dare neppure lontanamente un'idea o elencare i contributi che i ricercatori nominati hanno portato alla Geometria Algebrica; mi limito a ricordare il Cremona, in un certo senso come capostipite, in quanto con la invenzione delle trasformazioni che ancora oggi da lui prendono nome allargava il gruppo delle trasformazioni considerate prima di lui (le proiettive) ed introduceva nella Geometria Algebrica uno degli aspetti che si può additare come caratteristico di essa, nell'assetto attuale: studio delle proprietà degli enti algebrici invarianti per trasformazioni birazionali.

L'apporto della Scuola Italiana fu tale, per numero ed importanza di risultati e per fecondità di metodi, che quasi gettò ombra sui contributi e sui metodi di altre scuole. Per es. la «Teoria Geometrica delle funzioni algebriche» con l'appello alla intuizione ed alla rappresentazione, col suggestivo e rapido linguaggio geometrico, ebbe per molto tempo la prevalenza sulla «Teoria Aritmetica» delle stesse funzioni che veniva coltivata in prevalenza in Paesi di lingua germanica e considerava degli aspetti forse più atti ad essere collegati con altri e pur importanti campi di ricerca.

La Teoria delle funzioni algebriche di una variabile e delle curve algebriche giunse così ad un assetto che sarebbe molto imprudente pensare di poter migliorare; l'uso di concetti fecondissimi, come quello di «serie lineare di gruppi di punti» e di «equivalenza lineare tra gruppi di punti» permette di dare una elegantissima trattazione della intera Teoria. Essa poi è stata messa al riparo da ogni critica con la dimostrazione della possibilità di ricorrere a modelli canonici e della possibilità di sciogliere con trasformazioni birazionali le singolarità delle curve piane e quindi di riferirsi a modelli con singolarità semplici e ben definite; delle singolarità delle curve piane è stata poi data una analisi esauriente ed una classificazione definitiva. La Scienza possiede un monumento di questa Teoria nel trattato classico di F. ENRIQUES e O. CHISINI «Teoria Geometrica delle Equazioni e delle Funzioni Algebriche» pubblicato in un'epoca che può essere considerata come aurea nella nostra dottrina.

5. Tra le questioni particolarmente delicate che si sono presentate ai ricercatori in questo che si potrebbe considerare il primo grande ciclo della Geometria Algebrica ricordiamo le questioni poste dalla «Geometria Numerativa». In forma un po' imprecisa ma efficace, si potrebbe dire che questa costituisce un ramo della Geometria Algebrica che si occupa di «contare» le soluzioni dei problemi; sono per es. dei Teoremi

di Geometria Numerativa i cosiddetti «Principi di corrispondenza» di CHASLES e di CAYLEY–BRILL e le loro estensioni alle corrispondenze tra spazi lineari e tra varietà algebriche. Chiunque li abbia usati nella pratica soluzione di qualche problema determinato sa quali e quante cautele occorre usare per attribuire le dovute molteplicità alle soluzioni e «scartare» le soluzioni che non servono. Come pure è noto che talvolta è utile e forse necessario — per evitare delle difficoltà quasi inestricabili — il far ricorso alla considerazione di casi–limiti (varietà degeneri, multiple ecc.); ed ognuno sa con quali cautele occorre operare per dedurre dal caso–limite le proprietà del caso generale.

Del resto è pure un Teorema di Geometria Numerativa quel celebre Teorema di BÉZOUT che assegna il numero di intersezioni di due curve algebriche piane (nel campo proiettivo–complesso) e che diede occasione a tante critiche, elevate dai matematici contro le convenzioni in base alle quali veniva attribuita una certa molteplicità ad una intersezione non semplice in modo tale che la somma delle molteplicità stesse risultasse uguale al prodotto degli ordini delle curve.

La circostanza che si tratti di particolari funzioni analitiche ha qui un peso essenziale; ed è possibile giustificare appieno le convenzioni adottate facendo vedere, per es. come fa il SEVERI [2] che ogni intersezione cui viene attribuita una data molteplicità r si può sempre considerare come limite di r intersezioni semplici. Oppure, come ha fatto CHISINI [3], ricollegando tale molteplicità al numero di avvolgimenti di una curva piana regolare attorno ad un punto e quindi portando la questione sul piano topologico; deducendo quindi la invarianza di tale numero per trasformazioni appartenenti ad un gruppo continuo (come il proiettivo) e gettando le basi per future fecondissime applicazioni di tale interpretazione.

6. La estensione delle ricerche a varietà algebriche a più di una dimensione ed in particolare i primi sforzi per la costruzione di una Teoria delle superfici algebriche portarono

(2) Cfr. Per es. F. SEVERI, *Lezioni di Analisi* - Vol. I° - Cap. IX, § 10, n. 15

(3) Cfr. O. CHISINI, *Sulla molteplicità di intersezione di due curve algebriche in un loro punto comune* (in «Scritti Matematici offerti a LUIGI BERZOLARI», 1936).

alla ribalta dei problemi molto delicati ed indussero i ricercatori in difficoltà in apparenza inestricabili.

Si può ben dire che ogni possibile sforzo fu fatto per adattare alla Teoria delle superfici gli strumenti classici che si erano rivelati utilissimi nella Teoria delle curve: si ottenne così il concetto di serie lineare di curve su una superficie e di equivalenza lineare tra curve di una stessa superficie. Tuttavia le difficoltà si moltiplicavano e si manifestò presto la inadeguatezza dei vecchi strumenti: per es. si vide che la teoria della equivalenza lineare, trasportata alle V_{n-1} immerse in una V_n algebrica, poteva dare qualche risultato, ma che si rendeva necessaria una teoria che dominasse le V_{n-r} immerse in una V_n. In questo ordine di idee fu pioniere il SEVERI con la sua teoria delle serie di equivalenza dei gruppi di punti su una superficie algebrica. Anche qui devo rinunciare a dare un'idea, anche lontana e pallida della massa di risultati ottenuti in Italia in questo campo. Mi limiterò a ricordare che nella Teoria delle superfici accanto ai nomi di CASTELNUOVO, ENRIQUES e SEVERI non possono non essere ricordati i nomi di F. CONFORTO e B. SEGRE.

7. Passando ora a parlare delle nuove idee che circolano nella Geometria Algebrica, dirò che — in una visione necessariamente sommaria e sbrigativa dell'argomento — a mio parere gli aspetti più notevoli sono: l'estensione nell'uso ed il raffinamento dei metodi topologici e l'introduzione dei metodi dell'Algebra Astratta.

Il primo di questi aspetti si può far risalire alla eredità delle prime ricerche di Geometria Algebrica, che stabilivano il collegamento tra la teoria delle funzioni algebriche di una variabile e la topologia delle superfici chiuse bilatere. In seguito il PICARD, nei suoi studi rimasti classici sulla teoria dei differenziali algebrici, fu condotto a studiare le proprietà topologiche della varietà a 4 dimensioni che rappresenta biunivocamente i punti di una superficie algebrica.

La importanza della stretta connessione tra le proprietà dei due enti apparve luminosamente quando si riconobbe il legame che intercorre tra la irregolarità di una superficie algebrica da una parte ed il numero dei cicli unidimensionali indipendenti dalla sua riemanniana o il numero degli integrali di PICARD relativi alla superficie dell'altra.

La via tracciata da PICARD e SEVERI, seguita poi da LEFSCHETZ viene oggi percorsa con strumenti perfezionati e metodi raffinati. Le fondamentali intuizioni del KAEHLER hanno permesso di sfruttare i metodi della Geometria Differenziale nello studio delle riemanniane delle varietà algebriche, dando un assetto del tutto nuovo alla teoria delle trascendenti legate a integrali di differenziali algebrici.

In un indirizzo del tutto diverso ma non meno fecondo di risultati sono da ricordare le ricerche del CHISINI e della sua scuola, che hanno stabilito un collegamento sistematico tra le proprietà delle curve algebriche piane e quelle dei nodi e delle trecce dello spazio ordinario.

Ciò ha permesso di ottenere dei modelli concreti e suggestivi del comportamento di una curva algebrica in quanto varietà bidimensionale immersa in una varietà quadridimensionale che è la riemanniana del piano proiettivo complesso ed ha condotto a risultati di fondamentale importanza nel campo importante ed arduo dei Teoremi di esistenza di funzioni algebriche di più variabili ([4]).

Ed infine non si può dimenticare la importanza delle idee dell'Algebra Astratta nei moderni metodi di Geometria Algebrica; questa nuova fase di sviluppo della nostra scienza si potrebbe riguardare come rientrante in una legge dialettica, a cui obbedisce ogni costruzione scientifica; legge per la quale alla fase prevalentemente segnata dalla scoperta segue una fase prevalentemente critica, cui compete il compito non meno essenziale di consolidare le scoperte, di formularle, quasi cristallizzandole in simboli astratti, dai quali nasceranno i germi per nuove scoperte e intuizioni.

Oggi assistiamo ad un rigoglioso sviluppo delle Teorie di Geometria Algebrica che pongono alla base delle loro trattazioni non il corpo dei numeri complessi, sul quale per più di un secolo i classici hanno costruito, ma un corpo qualunque, anche non commutativo, anche a caratteristica finita ([5]). Si

---

([4]) Cfr. O. CHISINI, *Courbes de diramation de plans multiples et tresses algebriques* « Deuxième Colloque de Géométrie Algébrique » Liège, 1952.

([5]) Cfr. per es. B. SEGRE, *Lezioni di Geometria Moderna* (Bologna, 1948); W. V. HODGE & D. PEDOE, *Methods of Algebraic Geometry* (Cambridge, 1941); W. GRÖBNER, *Moderne Algebraische Geometrie* (Wien, 1949).

ottiene così una dottrina geometrica che può apparire ad alcuni sconcertante, perchè le sue proposizioni sono basate su Algebre le cui leggi formali si diversificano, talvolta in modo notevole, da quelle dell'Algebra cui siamo abituati; Algebre in cui l'aspetto convenzionale delle leggi formali è esaltato come per polemica, quasi a proclamare la suprema libertà della creazione che compete al Matematico.

8. A questo punto forse qualcuno si domanderà su quali fondamenti queste dottrine vengono classificate come «Geometrie». Per rispondere a questa domanda — forse non del tutto illegittima — osserviamo anzitutto che ormai da molti decenni i Geometri hanno dato cittadinanza nella loro scienza a dottrine che hanno via via sempre più stupito e sconcertato il profano. Già la introduzione del concetto di «iperspazio» sconcertò molti, costringendoli ad abbandonare il concetto della tridimensionalità dello spazio geometrico, che pareva radicato da esperienze secolari. La Geometria Differenziale poi — dando la massima estensione ed astrazione al concetto di «connessione» — si adoperava per scompigliare quel poco che era rimasto nella immaginazione delle esperienze comuni, riguardanti il trasporto delle lunghezze e delle direzioni. D'altra parte la Geometria Algebrica opera con la massima tranquillità in modo analogo dando per es. il nome di «curva» ad un ente che — come abbiamo già ricordato — è essenzialmente a due dimensioni e pertanto molto più legittimamente è rappresentato da una superficie che da una linea, nel senso abituale del termine.

Tuttavia se nei decenni passati qualcuno si fosse dato alla ricerca di un carattere comune a tutti gli «strani» enti che i Geometri avevano via via introdotti nella loro dottrina, forse lo avrebbe potuto trovare nella caratteristica della «continuità» (beninteso nel senso matematico); caratteristica che già nelle antiche classificazioni dei rami del sapere era stata posta come a distinzione della Geometria — definita come scienza della «quantità continua» — nei confronti della Aritmetica — intesa come scienza della «quantità discreta».

Ora, con la introduzione metodica dei concetti e dei procedimenti dell'Algebra Astratta, sembra che tale caratteristica venga a cadere, perchè si costruiscono Geometrie nei corpi finiti, in piani e spazi dotati di elementi in numero finito.

Per verificare quanto sia distante questa impostazione rispetto ai concetti che erano ritenuti fondamentali solo qualche tempo fa, basti per es. esaminare la dimostrazione che in alcuni Trattati moderni di Algebra viene data della esistenza di una radice di una equazione algebrica

$$f(x) = 0.$$

Essa viene ricondotta alla possibilità di costruire un corpo di numeri — che risulta dato dal corpo dei resti dell'anello dei polinomi rispetto al modulo $f(x)$ — nel quale il polinomio $f(x)$ risulti riducibile (6).

Si preferisce invece chiamare «Proprietà fondamentale del corpo complesso» quello che era prima chiamato il «Teorema fondamentale dell'Algebra» e che afferma «Ogni equazione algebrica a coefficienti complessi ammette (almeno) una radice, nel corpo complesso» (7).

Coloro che conoscono l'argomento sanno che nella dimostrazione di quest'ultimo Teorema entrano essenzialmente delle considerazioni di continuità, che invece esulano dalla costruzione precedentemente ricordata.

9. In che consiste allora il carattere comune a tutte le dottrine che oggi passano sotto il nome di «Geometria»?

Si presenta spontanea la risposta, candidamente spregiudicata, data da Veblen e Whitehead:
«Un ramo della Matematica è chiamato «Geometria» perchè il nome sembra giusto ad un numero sufficiente di competenti, in base a motivi di carattere tradizionale ed emotivo» (8).

Tali concetti sono ribaditi per es. dal Gröbner, uno dei cultori della Geometria Algebrica secondo i moderni indirizzi dell'Algebra Astratta:
«. . . . l'Algebra delle equazioni algebriche o dei polinomi è il solo fondamento della Geometria Algebrica, al quale la nostra immaginazione non può aggiungere altro che una sorta di

---

(6) Cfr. per es O. Perron, *Algebra* (Berlin, 1927), Cap. VI.

(7) Cfr. B. L. Van der Waerden, *Algebra*, (Berlin, 1955), Cap. IX, § 70.

(8) Cfr. O. Veblen & J. H. C. Whitehead, *The foundations of Differential Geometry* (Cambridge, 1932).

colorito, per rendere più attraenti al nostro spirito quegli enti di natura troppo astratta» (9).

Rimane quindi soltanto il fatto che le dottrine oggi classificate come «Geometrie» sono più o meno lontanamente collegate con la Geometria nel senso tradizionale del termine; oppure sono suscettibili di interpretazioni particolari che possono avere un significato geometrico, sempre nel senso tradizionale. Quindi non sarebbe del tutto incoerente un autore il quale scrivesse, all'inizio di un suo trattato: «Non domandatemi che cosa è la Geometria: leggete questo Trattato. Chiamo Geometria ciò che è scritto qui e qualcosa d'altro ancora».

Ad attenuare il senso di sconcerto che può prendere chi non sia abituato alla mentalità della Matematica moderna ricordiamo tuttavia che ben poco possiamo fidarci di quel complesso di abitudini e reazioni psichiche, di rievocazioni immaginative che viene spesso indicato col vago nome di «intuizione geometrica». Per es. in relazione a quel concetto di «continuo geometrico» che appare tanto chiaro alla «intuizione geometrica» dobbiamo ricordare che soltanto la logica (con la dimostrazione — che risale alla scuola pitagorica — della esistenza di grandezze incommensurabili) può assicurarci sulla non esistenza di un «atomo», di un «quanto» di spazio; questione sulla quale nessuna esperienza e nessuna immaginazione può decidere nulla.

10. Ed allora quale il valore di queste e di analoghe dottrine della moderna Matematica, al di là di un puro godimento estetico riservato ai soli specialisti e non condiviso dalla maggioranza? Si aprirebbe qui il campo a discutere sulla utilità, anzi sulla necessità, per il singolo e per il corpo sociale, di una attività puramente spirituale dell'uomo, sulla necessità della scienza pura e dell'arte. Ma altri ed in altra sede dibatte tali questioni meglio di quanto non possa fare io qui. Mi limito — prima di concludere — a considerazioni che riguardano un campo più ristretto ma forse non meno importante.

È noto a tutti che la Matematica sta prendendo un posto

---

(9) W. Gröbner, *La théorie des ideaux et la géometrie algébrique* («Deuxième Colloque de Géometrie Algébrique», Liège. 1952)

sempre più importante nella cultura e nella vita del mondo moderno; essa non solo fornisce al Fisico gli strumenti intellettuali per le sue sintesi scientifiche, ma dà gli schemi e gli strumenti a moltissime altre scienze. Inoltre dalle ispirazioni della Matematica traggono origine le moderne ricerche di analisi del linguaggio, del pensiero e dei suoi procedimenti che oggi fioriscono rigogliose.

Ma la Matematica non ha soltanto l'ufficio di offrire altissimi godimenti spirituali ed estetici agli iniziati, oppure di fornire strumenti potentissimi alle altre scienze o schemi metodologici al sapere umano.

Un altro aspetto della Matematica è a mio parere di grande importanza: l'aspetto della disciplina atta alla formazione intellettuale ed alla educazione spirituale.

Non si può negare che queste idee stiano facendosi strada nelle considerazioni di coloro cui compete la responsabilità della formazione e della educazione dei giovani. Dalla nota massima «Purus Mathematicus, purus asinus» frequentemente ripetuta da certi umanisti e che ha un suo valore, come giusta condanna del distacco dall'aspetto umano dei problemi (che è d'altronde difetto comune agli specialisti troppo infatuati del loro mondo ristretto e dimentichi di tutto il resto) siamo passati a riconoscimenti obbiettivi ed aperti del valore educativo della Matematica. Mi piace citare qui le parole di un cultore di pedagogia a noi contemporaneo, che costituiscono un riconoscimento tanto più valido perchè proviene da una persona che non ha coltivato la Matematica come specialista: Egli elenca così i vantaggi della formazione matematica:

«. . . . ordine, disciplina, consapevolezza, chiarezza, rigore, semplicità, spirito di controllo e di verifica, bisogno di chiarezza, antiverbalismo, antiretoricità» [10].

Naturalmente, per l'acquisto di tali valori intellettuali e spirituali la Matematica va intesa non solo come complesso di dottrine e metodi, come cumulo di definizioni e teoremi, ma come modo di pensare.

Abitudine alla chiarezza di espressione, alla formulazione esatta e rigorosa, alla deduzione ineccepibile, ma anche all'alle-

---

[10] A. Agazzi, *Il problema pedagogico didattico dell'insegnamento della Matematica* (Ricerche didattiche N. 10-11, 1952).

namento della fantasia creatrice e della intuizione. Insomma quella «Matematica ragionevole» che non sia dominata dallo strumento e dal culto della formula vuota, fine a sè stessa, ma miri sempre al dominio dello strumento ed al contenuto ed al significato della formula.

Ora io vorrei che non mi facesse velo al giudizio l'entusiasmo e l'amore che porto alla mia materia; ma mi pare che la Geometria sia tra le scienze matematiche più adatte a dare questa formazione e ad ottenere nei giovani questo allenamento intellettuale; il breve esame dello sviluppo storico e delle caratteristiche di uno tra i suoi rami più importanti e certo tra i più cari al nostro cuore di italiani ci fa vedere come di fatto sia necessario in ogni passo l'intervento della intuizione e della critica, della fantasia e della formula.

Pertanto posso concludere augurando che venga sempre più riconosciuto il valore della Geometria nella educazione intellettuale e spirituale dei giovani e che, anche per questo, la Geometria Italiana conservi sempre ed accresca nel futuro il prestigio mondiale di cui gode.

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE